

**Protótipo 1 – Problema da Wyndor Glass Co.** (HL<sup>1</sup>, §3.1, pág. 24)

A *WYNDOR GLASS CO.* fabrica produtos de vidro de alta qualidade, nomeadamente janelas e portas. A empresa tem três fábricas: **F1**, **F2** e **F3**. Em **F1** fabrica-se caixilharia de alumínio. A caixilharia de madeira é feita em **F2**. Em **F3** é produzido o vidro e feita a montagem das portas e janelas.

Tendo-se verificado perdas de rentabilidade, a direcção decidiu reformular a linha de produção. Assim, decidiu interromper a produção de artigos não rentáveis, com vista a libertar capacidade produtiva que permita iniciar o fabrico de um ou dois novos produtos que têm sido procurados. Um destes novos produtos (**P1**) é uma porta de vidro com caixilharia de alumínio. O outro produto (**P2**) é uma janela com caixilharia de madeira. Estes produtos são fabricados em lotes. O departamento de marketing informou que toda a produção destes novos produtos seria vendida. No entanto, uma vez que a capacidade produtiva tem que ser repartida entre ambos os produtos na fábrica **F3** e não sendo clara a forma mais lucrativa de o fazer, a direcção pediu ao departamento de Investigação Operacional (IO) para estudar a questão.

Após algum trabalho de investigação o departamento de IO determinou:

- i) o número de horas máquina (*h.m.*) semanais de cada fábrica disponíveis para a produção dos novos produtos;
- ii) o número de *h.m.* semanais de cada fábrica requeridas para produzir cada lote de cada um dos novos produtos;
- iii) o lucro que se obtém, por lote produzido de cada um dos novos produtos.

Toda esta informação foi resumida na tabela seguinte:

fábrica	<i>h.m.</i> necessárias à produção de um lote de		<i>h.m.</i> disponíveis por semana (capacidade disponível)
	<b>P1</b>	<b>P2</b>	
<b>F1</b>	1	0	4
<b>F2</b>	0	2	12
<b>F3</b>	3	2	18
lucro por lote produzido ( <i>u.m.</i> )	3	5	

A direcção da empresa pretende saber o número de lotes de portas e janelas a produzir por semana, de forma a maximizar o lucro, não excedendo as capacidades disponíveis das três fábricas.

- a) Formule e resolva o problema.
- b) Considerando o mesmo conjunto de soluções admissíveis determine o conjunto de soluções óptimas se se pretender:
  - b1)**  $MaxZ = 5x_1 + x_2$ ;      **b2)**  $MaxZ = 6x_1 + 4x_2$ ;      **b3)**  $MinZ = -x_1 + x_2$ ;
  - b4)**  $MinZ = x_1 - x_2$ ;      **b5)**  $MaxZ = x_1$ ;      **b6)**  $MaxZ = 4x_2$ .
- c) A direcção da empresa pretende saber quais as consequências de ser exigido um lucro mínimo de 50 *u.m.*.
- d) Resolva o problema inicial, mas supondo que as fábricas **F2** e **F3** têm capacidade ilimitada. Repita a alínea **b)** com esta nova região admissível.
- e) Considere que as 18 *h.m.* semanais disponíveis em **F3** têm que ser todas usadas. Mantendo as restantes condições iniciais, indique, justificando, qual a região admissível e a respectiva solução óptima.

- f) Resolva o problema inicial considerando que a quantidade de janelas não pode ser inferior ao quádruplo da de portas.

**Protótipo 2 – Problema da Profit & Gambit Co.** (HHSS<sup>2</sup>, §2.6, pág. 36)

A *PROFIT GAMBIT CO.* fabrica produtos de limpeza doméstica. A empresa pretende expandir-se no mercado e foi decidido fazer uma campanha publicitária baseada em três produtos: *spray* tira-nódoas, novo detergente líquido para roupa e detergente tradicional, em pó, também para roupa.

A campanha abrangerá um canal de TV e um jornal diário. O detergente líquido será o único anunciado na TV, enquanto que os anúncios de imprensa serão destinados aos três produtos. A gerência estabeleceu objectivos mínimos para a campanha:

- o *spray* tira-nódoas deve aumentar a sua cota de mercado 3%;
- o novo detergente líquido deve aumentar a sua cota de mercado 18%;
- o detergente em pó deve aumentar a sua cota de mercado 4%.

Segue-se, por cada unidade de anúncio dos produtos, o acréscimo estimado nas respectivas cotas de mercado (uma unidade é um bloco de anúncios). A última linha mostra o custo (em *u.m.*) por unidade para cada um dos tipos de anúncio.

	TV	jornal
<i>spray</i> tira-nódoas	0%	1%
detergente líquido	3%	2%
detergente em pó	-1%	4%
custo ( <i>u.m.</i> )	1	2

Pretende-se determinar a quantidade de anúncios da campanha em cada um dos referidos meios de comunicação que permita atingir os objectivos da campanha a um custo total mínimo. Formalize e resolva graficamente este problema.

**Exercícios**

1. Formalize os problemas que se seguem no contexto da PL e resolva-os utilizando o *Solver/Excel*.

- a) (HL<sup>1</sup>, 3.1-11., pág. 78) Uma fábrica tem capacidade de produção que não está a ser utilizada devido ao cancelamento da produção de uma certa linha de produtos. Essa capacidade vai ser aproveitada para produzir pelo menos um dos três produtos: **1**, **2** e **3**. O número de horas disponíveis semanalmente nas máquinas **A**, **B** e **C**, onde os produtos são fabricados, é de 500, 350 e 150, respectivamente.

O número de horas de cada máquina necessárias à produção unitária dos produtos é dado na tabela seguinte:

tipo de máquina	produto 1	produto 2	produto 3
<b>A</b>	9	3	5
<b>B</b>	5	4	0
<b>C</b>	3	0	2

O departamento de vendas informou que a venda do produto **1** será dupla da do produto **2** e que não será possível vender mais do que 20 unidades do produto **3**, por semana. Por cada unidade vendida dos produtos **1**, **2** e **3** obter-

-se-á um lucro de 50, 20 e 25 *u.m.*, respectivamente. Formule e resolva o problema, sabendo que se pretende maximizar o lucro.

- b) Uma exploração agrícola familiar tem 125 *hectares* de terra arável e a família dispõe de 4 000 *u.m.* para investir. Na sua totalidade os membros da família podem trabalhar 3 500 *h* nos meses de inverno e 4 000 *h* nos meses de verão. No caso de não serem precisas todas as horas disponíveis, alguns vão trabalhar para outras quintas por 0.5 *u.m./h* nos meses de inverno e por 0.6 *u.m./h* nos meses de verão, revertendo os salários para a família.

Na quinta cultiva-se o campo e faz-se criação de animais: vacas e galinhas (garantidamente saudáveis). Cada vaca necessita de um investimento de 120 *u.m.* e cada galinha de 0.9 *u.m.*. Cada vaca exige 1.5 *hectares* de terra, 100 *h* de trabalho durante o Inverno, 50 *h* durante o verão e espera-se que dê um lucro de 100 *u.m./ano*.

Por sua vez as galinhas não precisam de terra, mas apenas de 0.6 horas de trabalho durante o Inverno e 0.3 *h* durante o verão, por cada uma, estimando-se um lucro unitário de 0.5 *u.m /ano*.

É possível ter, no máximo, 32 vacas e 3 000 galinhas. Em relação às culturas sabe-se que se semeará soja, milho e aveia. Prevê-se que o número de horas de trabalho necessário por hectare seja, para cada uma das culturas, dado por:

	soja	milho	aveia
nº de horas no inverno	20	35	10
nº de horas de verão	50	75	40
lucro anual por hectare ( <i>u.m.</i> )	60	90	45

Determine a melhor forma de otimizar o rendimento da família. (Nota: Na formulação admita que todas as quantidades são divisíveis.)

- c) Uma fábrica têxtil importa três tipos de fio: algodão, lã e fibra, para produzir três tipos de tecido: **T1**, **T2** e **T3**. Os tecidos têm que obedecer aos seguintes padrões:

tecido	padrão	preço de venda ( <i>u.m./kg</i> )
<b>T1</b>	pelo menos 60% de algodão e no máximo 20% de fibra	680
<b>T2</b>	no máximo 60% de fibra e pelo menos 15% de lã	570
<b>T3</b>	no máximo 50% de fibra	450

Pretende-se determinar a política que maximiza os lucros, sabendo que as disponibilidades de fio e os respectivos custos são:

fio	disponibilidades (em <i>kg</i> )	custos ( <i>u.m./kg</i> )
algodão	2 000	700
lã	2 500	500
fibra	1 200	400

- d) Uma empresa tem ao seu serviço 100 operários especializados, 230 operários semi-especializados e 80 operários não especializados. Os operários semi-especializados podem passar a operários especializados se frequentarem, durante um ano, cursos de formação que custam 500 *u.m.* por formando. Os operários não especializados podem passar a semi-especializados mediante a frequência de cursos de igual duração, mas que custam apenas 350 *u.m.* por formando.

A empresa pretende planear a formação do seu pessoal durante os próximos dois anos, por forma a que no fim do período de planeamento:

- a mão de obra não especializada não represente mais 10% do total;
- pelo menos 40% dos trabalhadores tenham frequentado cursos de especialização;
- pelo menos 35% dos gastos em formação tenham sido feitos com operários não especializados.

Quanto precisa a empresa de gastar em formação?

- e) (HL<sup>1</sup>, 8.2-9, pág. 351) Uma empresa energética está a preparar um plano para instalação de sistemas de energia nas novas construções. As necessidades dos clientes estão divididas em: electricidade, água quente e aquecimento (do ambiente). De acordo com as previsões, as necessidades diárias destes bens/serviços são as seguintes: electricidade – 30 unidades; água quente – 20 unidades; aquecimento – 50 unidades. Estes três bens (chamados *utilities*) podem ser obtidos a partir de energia eléctrica, de gás natural e de painéis solares. Devido à limitação dos telhados, só há capacidade para fornecimento de 30 unidades de energia a partir desta fonte. Por outro lado, as necessidades de electricidade só podem ser satisfeitas a partir da compra de energia eléctrica. A água quente e o aquecimento podem também ser obtidos a partir das fontes gás natural e painéis solares. Cada unidade de electricidade custa 50€. Os custos unitários (em €/unidade) associados à produção das restantes *utilities*, consoante a forma de energia utilizada, são os seguintes:

	Energia eléctrica	gás natural	painéis solares
água quente	150	110	70
aquecimento	140	100	90

Pretende-se minimizar o custo total de satisfazer as necessidades energéticas dos clientes.

- f) Uma empresa tem de fornecer 100 *ton.* de certa mistura a um dos seus clientes e pretende obter as matérias primas necessárias, ao custo mínimo.

A referida mistura pode ser obtida a partir de 3 matérias primas (**M1**, **M2** e **M3**) adquiridas aos preços de 3, 4 e 2 *u.m.* por *ton.*, respectivamente. A mistura deve satisfazer determinados requisitos em relação a duas substâncias, **A** e **B**, existentes nas matérias primas. Assim, a mistura deve conter, pelo menos, 20% de substância **A** e 10% de substância **B**. A substância **A** constitui 50% de **M1** e 10%

de **M3**, enquanto a substância **B** existe em **M2** e **M3** constituindo 20% de cada uma destas matérias primas.

Qual a composição óptima da mistura?

- g) Uma empresa de conservas de fruta tem de produzir, nos próximos quatro meses, o suficiente para satisfazer os contratos acordados com os seus clientes. A capacidade de produção da empresa varia de mês para mês, pois depende das disponibilidades de fruta. Os custos de produção variam também com a disponibilidade de pessoal em cada mês. Esta informação está resumida no quadro abaixo.

mês	capacidade produtiva (em ton.)	contratos de venda (em ton.)	custos de produção (em u.m. por ton.)
1	50	30	70
2	50	40	80
3	60	75	75
4	40	45	85

As conservas podem ser produzidas num mês e armazenadas, no final desse mês, para venda posterior, sendo o custo de armazenagem 5 u.m. por tonelada, por mês. As conservas produzidas e vendidas no mesmo mês não incorrem em custos de armazenagem.

No mês inicial não há conservas em armazém e não se pretende deixar conservas em armazém no fim do quarto mês.

Pretende-se planear a produção, de acordo com os dados, satisfazendo os compromissos e de forma a minimizar o custo total.

- h) Uma unidade industrial usa substâncias químicas no fabrico de um determinado produto. Para o efeito tem disponíveis 30 ton. da substância química **A**, e 10 ton. da substância **B**. Cada unidade do produto é vendida a 30 u.m., e para a sua produção são necessárias 5 ton. de **A** e 1 ton. de **B**. A unidade industrial pode comprar mais toneladas da substância **A**, por 4 u.m./ton., ou vender a quantidade que lhe sobrar exactamente pelo mesmo preço. Pretende-se saber que decisão tomar.

- i) (HL<sup>1</sup>, pág. 49) A *NORJ & LEETS CO.*, uma das maiores produtoras de aço da América, é a única grande empregadora da cidade de *Steeltown*, onde se localiza. *Steeltown* tem acompanhado o crescimento da companhia, que neste momento emprega cerca de 50 000 dos seus residentes. Até agora, o lema da cidade tem sido “O que é bom para a *NORJ & LEETS* é bom para a cidade”. No entanto, esta atitude está a mudar devido à poluição descontrolada do ar provocada pelos fornos, que está a estragar a cidade e a causar problemas de saúde nos seus habitantes.

Uma revolta recente dos accionistas resultou na eleição de um novo corpo directivo da companhia. Os novos directores comprometeram-se a seguir as políticas de responsabilidade social vigentes e têm discutido com populares e responsáveis de *Steeltown*, o que poderão fazer para evitar a poluição do ar.

Os três principais tipos de poluentes são partículas de matéria, óxidos sulfúricos e hidrocarbonetos. As novas regras obrigam à redução anual da emissão destes poluentes, de acordo com a tabela seguinte:

poluente	redução anual requerida ( <i>milhões de libras</i> )
partículas	60
óxidos sulfúricos	150
Hidrocarbonetos	125

Os directores pediram aos gestores que determinassem como seria possível respeitar as novas regras ao menor custo possível.

As principais fontes de poluição são os altos fornos para fazer ferro gusa e os fornos abertos que transformam o ferro em aço. Em ambos os casos os gestores decidiram que os métodos melhores para reduzir a poluição são:

- 1) aumentar a altura das chaminés;
- 2) usar filtros nas chaminés;
- 3) passar a incluir a limpeza do combustível dos fornos.

Existem limitações tecnológicas na aplicação de cada um destes métodos, por exemplo, a altura da chaminés não pode exceder um certo valor. A tabela seguinte mostra que quantidade de emissão de poluentes (em *milhões de libras por ano*) pode ser eliminada em cada tipo de forno, usando apenas um dos métodos até ao seu limite máximo. Assume-se que cada método pode ser usado abaixo do seu limite máximo, que as percentagens podem ser diferentes para cada tipo de forno e que o facto de usar em simultâneo mais de um método não afecta praticamente nada o efeito de cada um (separadamente).

Quantidade de emissão de poluente eliminada (em *milhões de libras por ano*):

poluentes	chaminés mais altas		filtros		melhores combustíveis	
	altos fornos	fornos abertos	altos fornos	fornos abertos	altos fornos	fornos abertos
partículas	12	9	25	20	17	13
óxidos S.	35	42	18	31	56	49
hidrocarbonetos	37	53	28	24	29	20

Observando os dados torna-se claro que nenhum método pode atingir o objectivo se utilizado isoladamente. Por outro lado, usando os três métodos, simultaneamente, na sua capacidade máxima, nos dois tipos de fornos, reduz-se a emissão dos poluentes muito mais do que o necessário (e, provavelmente, a um custo muito elevado). Assim, os gestores devem ter em conta os custos e procurar a melhor combinação dos três métodos.

Na tabela seguinte estão os custos estimados (em *milhões de dólares*) de usar os diferentes métodos nos diferentes fornos, se cada um dos métodos for utilizado no seu máximo.

método de redução	altos fornos	fornos abertos
chaminés mais altas	8	10
Filtros	7	6
melhor combustível	11	9

Determine que percentagem da capacidade máxima de cada método em cada tipo de forno deve ser usada, tendo em conta as exigências de redução na emissão de poluentes e de modo a minimizar o custo total.

- j) (HL<sup>1</sup>, pág. 45) O *Southern Confederation of Kibbutzim (SCK)* é um grupo de três *kibbutz* em Israel. Todo o planeamento para este grupo é feito no gabinete de coordenação técnica. Neste momento este gabinete está a planear a produção agrícola para o próximo ano.

Em cada *kibbutz*, a produção agrícola é limitada pela quantidade de terra irrigável e pela quantidade de água atribuída por um Comissário (oficial do governo) para irrigação. Estes dados encontram-se na tabela seguinte.

<i>kibbutz</i>	terra irrigável (em <i>ares</i> )	atribuição de água (em <i>pés</i> )
1	400	600
2	600	800
3	300	375

As colheitas desejadas para esta região, na próxima estação, incluem beterraba, algodão e sorgo. Estas três culturas diferem sobretudo no rendimento líquido esperado, por are, e no consumo de água. Além disso, o ministro da agricultura estabeleceu um número máximo de ares a plantar, para cada uma das culturas pela *SCK*, conforme a tabela seguinte.

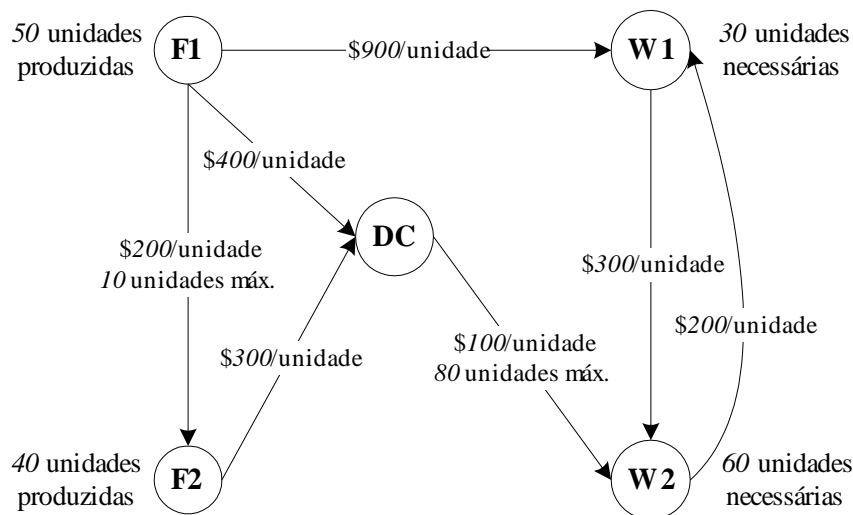
colheita	quota máxima (em <i>ares</i> )	consumo de água (em <i>pés/are</i> )	rendimento líquido (em $\$/are$ )
beterraba	600	3	1 000
Algodão	500	2	750
Sorgo	325	1	250

Devido à limitação de água disponível para irrigação na próxima estação, a *SCK* não poderá usar toda a sua terra irrigável para plantações. Para assegurar a homogeneidade dos três *kibbutz*, foi combinado que cada *kibbutz* plantará a mesma proporção da sua terra irrigável. Por exemplo, se o *kibbutz* 1 plantar 200 dos seus 400 *ares* de terra irrigável, o *kibbutz* 2 deverá plantar 300 dos seus 600 *ares* e o *kibbutz* 3, 150 dos seus 300 *ares*. No entanto, a combinação de quais os produtos a plantar em cada *kibbutz* é livre.

O propósito do gabinete de coordenação técnica é planear quantos *ares* devem ser atribuídos a cada plantação em cada um dos *kibbutz*, satisfazendo as restrições atrás referidas. O objectivo é maximizar o rendimento líquido da *SCK*, como um todo.

- k) (HL<sup>1</sup>, pág. 58) A *Distribution Unlimited CO.* vai produzir um produto novo em duas das suas fábricas. O produto deve depois ser transportado para os seus dois armazéns, sendo que ambas as fábricas podem abastecer os dois armazéns. A rede de distribuição está esquematizada na figura seguinte, onde **F1** e **F2** representam as fábricas, **W1** e **W2** os armazéns e **DC** um centro de distribuição por onde pode passar o produto.





As quantidades a serem transportadas das fábricas estão à esquerda de cada fábrica e as quantidades que devem chegar a cada armazém estão à direita do respectivo armazém. Cada linha representa uma possibilidade para transporte, tendo que ser respeitadas as orientações. O custo de transportar uma unidade do produto em cada ligação está sobre as respectivas ligações. Como consta da figura, existe ainda uma limitação às unidades que se podem transportar ao longo das ligações **F1**→**F2** e **DC**→**W2**. As restantes ligações comportam qualquer quantidade que seja possível enviar a partir de **F1** e **F2**.

Encontre uma forma de transportar o produto das fábricas para os armazéns, minimizando o custo total do transporte.

2. (HL<sup>1</sup>, 3.4-11., pág. 96) Um investidor pretende saber como aplicar 60 000 u.m. que tem disponíveis, de forma a conseguir a máxima remuneração possível ao fim de 5 anos. No início de cada ano pode investir em 2 tipos de actividades rentáveis, **A** e **B**. Por cada u.m. investida em **A** no início de um ano, recebe 1.4 u.m. (isto é, um lucro de 40%) dois anos mais tarde, a tempo de serem reinvestidos. Por cada u.m. investida em **B** no início de um ano, recebe 1.7 u.m. três anos mais tarde. Além destas, existem outras actividades rentáveis, **C** e **D**, que só estarão disponíveis mais tarde. Por cada u.m. investida em **C** no início do segundo ano, recebe 1.9 u.m. no final dos 5 anos. **D** origina um lucro de 30 % ao ano, mas só estará disponível no início do 5º ano.

Formule este problema em PL, sabendo que no fim do 5º ano o investidor pretende ter todo o dinheiro disponível. Resolva-o usando o *Solver/Excel*.

3. Resolva graficamente e utilizando o *Solver/Excel* os seguintes problemas de PL:

a)  $MaxZ = x_1 + 2x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b)  $MaxZ = 3x_1 + 4x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



**c)**  $MaxZ = x_1 + x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**d)**  $MaxZ = x_1 - x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**e)**  $Max Z = -10x_1 - 5x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 + \frac{8}{5}x_2 \geq -3 \\ x_1 \text{ livre}; x_2 \leq 0 \end{cases}$$

**f)**  $MinZ = x_1 + x_2$

s. a:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**g)**  $MinZ = x_1 + x_2$

s. a:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**h)**  $MinZ = x_1 + x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**i)**  $Min Z = 3x_1 + 2x_2$

s. a:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**j)**  $MaxZ = 3x_1 + 6x_2$

s. a:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**4.** Resolva os exercícios 3.1-8., 3.1-9. e 3.2-2. do livro HL<sup>1</sup> (pág. 92-93).

<sup>1</sup> Hillier, Lieberman, "Introduction to Operations Research", 9ª edição, McGraw-Hill, 2010.

<sup>2</sup> Hillier, Hillier, Schmedders, Stephens, "Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets", 3ª edição, McGraw-Hill, 2008.